Матрицы и определители

1. Матрицы

Термин «матрица»

ввел английский математик

Джеймс Джозеф Сильвестр.

1814–1897

«Математика – музыка разума».
Джеймс Джозеф Сильвестр

Матрицы

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная числовая таблица, состоящая из m строк и n столбцов.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Числа a_{ij} – элементы матрицы, где

i – номер строки

j – номер столбца.

Обозначения:

A, B, C … или $(a_{ij}), (b_{ij}), (c_{ij})$ ...

Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$$

2×2

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

3×3

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

3×2

1.1. Виды матриц

1. Прямоугольная матрица

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется **прямоугольной.**

$$A_{2x3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Матрица-строка и матрица-столбец

Матрица-строка (1×n)	Матрица-столбец (n×1)
$A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix}$	$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$

3. Нулевая матрица

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой.** Обозначается буквой O.

Нулевая

$$O_{m\text{x}n}=\begin{array}{cc} \overbrace{}^{n} & \\ \begin{bmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix} & \left.\vphantom{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}\right\} m \end{array}$$

4. Квадратная матрица (m=n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & ..... & ..... \\ a_{n1} & a_{n2} & ..... & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (1.2)$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов называется **квадратной**.

Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют **матрицей n - го порядка**.

Примеры

Квадратные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

3-го порядка

$$B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

2-го порядка

5. Диагональная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = diag\left(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\right). \quad (1.3)$$

Элементы квадратной матрицы с одинаковыми индексами от $\boldsymbol{a_{11}}$ к $\boldsymbol{a_{nn}}$, образуют **главную диагональ.**

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной. (1.3) – диагональная.**

Примеры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица 3-го порядка

$$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Диагональная матрица 2-го порядка

6. Единичная матрица

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице,

называется **единичной.**

Обозначается буквой E или I.

$$E_2 = diag(1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_n = diag(\overbrace{1, 1, \ldots, 1}^{n})$$

$$E_3 = diag(1,\ 1,\ 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

7. Треугольная матрица

Квадратная матрица называется **треугольной,** если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Примеры

верхнетреугольная	**нижнетреугольная**
$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$	$B = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

8. Транспонированная матрица

Матрица, полученная из данной заменой каждой её строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной.

Обозначается $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

Пример

$$A=\begin{pmatrix}0 & 3\\ 1 & 4\\ 2 & 5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A}$$

9. Симметрическая матрица

- Если $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$ то матрица $\boldsymbol{A}$ называется **симметрической**.

Пример

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} = C$$

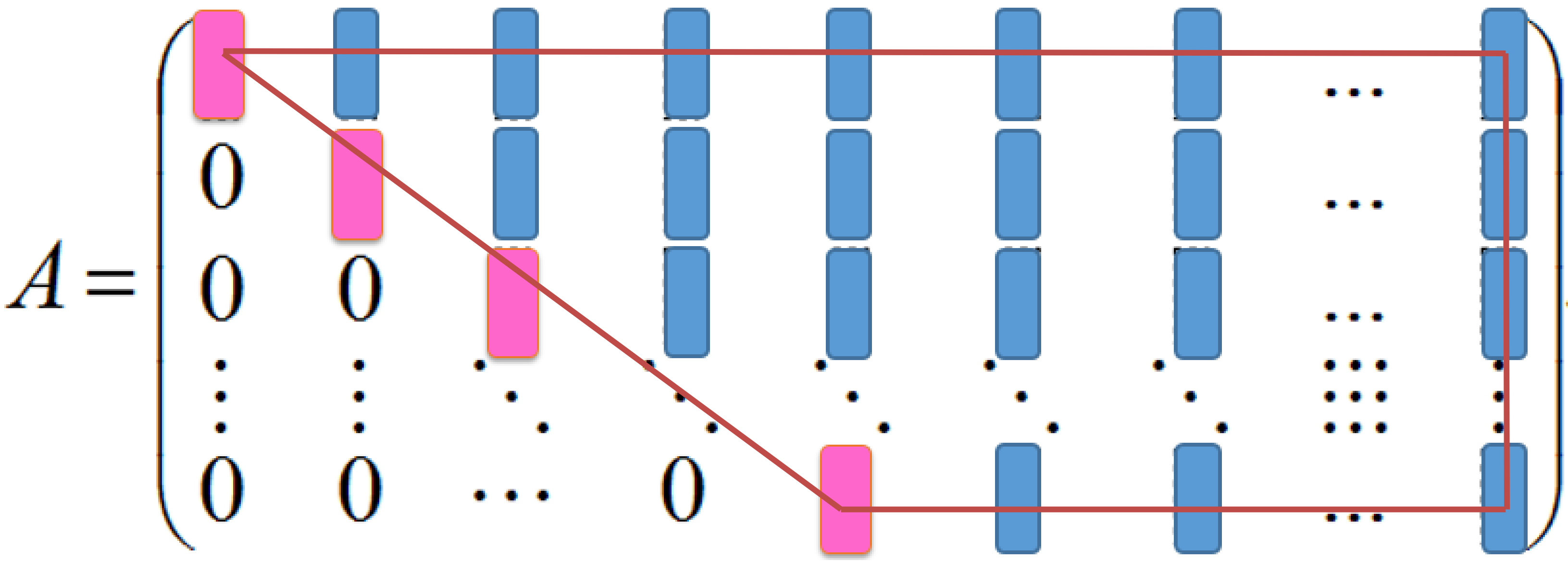
10. Кососимметрическая матрица

$$K^T = -K$$

Пример

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. ТРАПЕЦИЕВИДНАЯ ФОРМА МАТРИЦЫ



- $a_{ii} \neq 0.$ - a_{ij} - *любое*, $j>i$.

12. Равные матрицы

Две матрицы

$A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$

называются **равными**, если

1) Размеры матриц совпадают

2) Соответствующие элементы матриц равны:

$a_{ij} = b_{ij}$,

$i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n.$

1.2. Операции над матрицами

Сумма матриц

Сложение и вычитание матриц возможно, если эти матрицы имеют **одинаковый размер**.

Суммой матриц $A=(a_{ij})$ **и** $B=(b_{ij})$ размера $m\times n$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размера $m\times n$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B.

$$\boxed{c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}\,,\quad (\,i=\overline{1,m}\,;\;j=\overline{1,n}\,)}$$

Сумма матриц

Пример

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+4 & 3-5 \\ -1+2 & 0+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$$

Пример

Найти разность матриц

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A-B=\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3-0 & 3-2 \\ -1-3 & 0+1 \\ 1-2 & 2-2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ и числа λ называется матрица того же размера, элементы которой равны λa_{ij}.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \Rightarrow 2A=\begin{pmatrix}2 & 4 & -6\\ 0 & 0 & 8\\ 0 & 0 & 10\end{pmatrix}.$$

Свойства суммы матриц и умножения матрицы на число

Пусть A, B, C, O – матрицы одного размера, а α, β, λ - числа.

1. Коммутативность суммы матриц

$$A + B = B + A$$

2. Ассоциативность сложения матриц

$$(A+B)+C=A+(B+C)$$

3. Дистрибутивность

$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$$

$$\alpha - \text{число}.$$

$\alpha \beta A = \alpha(\beta A) = \beta(\alpha A)$, **$\alpha$, β - числа.**

4.

$$A + O = A$$

O – нулевая матрица, того же размера, что и А.

Произведение матриц

Умножение матриц выполнимо, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Умножение строки на столбец

$$A=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

$$AB=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n.$$

Пример

$$A=(3\,,-1\,,4),B=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$AB=3\cdot 1-1\cdot 0+4\cdot 3=15.$$

Умножение матрицы на столбец

Каждая строка матрицы скалярно умножается на столбец

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 8 + (-1) \cdot 7 + 2 \cdot 2 \\ 4 \cdot 8 + 2 \cdot 7 + 0 \cdot 2 \\ (-5) \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Произведением матриц $A=(a_{ij})$ (размера $m\times p$) и $B=(b_{ij})$ (размера $p\times n$) называется матрица $C=(c_{ij})$ (размера $m\times n$), элементы c_{ij} которой вычисляются как скалярное произведение i – й строки матрицы A и j – го столбца матрицы B.

Умножение матриц

$$\begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2} \quad \dots \quad a_{ip}} \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dots & \dots & b_{1j} & \dots \\ \dots & \dots & b_{2j} & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & b_{pj} & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \\ \dots & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots \\ \dots & \dots & & \dots \end{pmatrix}.$$

Пример

Найти произведение матриц $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + 6\cdot 0 & 2\cdot 2 + 6\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 6\cdot 3 \\ 1\cdot 1 + (-2)\cdot 0 & 1\cdot 2 + (-2)\cdot(-1) & 1\cdot 0 + (-2)\cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -2 & 18 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A \cdot B \neq B \cdot A}$$

Вообще говоря, если произведения AB и BA существуют, то AB $\neq$ BA.

Если AB=BA, то такие матрицы называются **перестановочными.**

Пример. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix};$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}.$$

УМНОЖЕНИЕ СТОЛБЦА НА СТРОКУ

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-5) & 7 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot (-5) & 0 \cdot 3 \\ (-4) \cdot 2 & (-4) \cdot (-5) & (-4) \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & -35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & 20 & -12 \end{pmatrix}$$

При условии, что операции в обеих частях равенств выполнимы, справедливы следующие свойства.

Свойства произведения матриц

1. $A \cdot O = O$;
2. $A \cdot E = A$;
3. $A \cdot B \neq B \cdot A$;
4. $\alpha (AB) = (\alpha A) \cdot B = A \cdot (\alpha B)$;
5. $ABC = (AB) \cdot C = A \cdot (BC)$;
6. $A (B + C) = AB + AC$;
7. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

2. Определители

Вильгельм Готфрид Лейбниц

(1646-1716) — саксонский философ, логик, математик, механик, физик, юрист, историк, дипломат, изобретатель и языковед.

Понятие «определитель» принадлежит Г. Лейбницу (1678).

Определитель (детерминант) –

числовая характеристика **квадратной** матрицы.

Обозначения определителя матрицы А:

$$|A|,\ \det A,\ \Delta.$$

Невырожденная матрица

- Квадратная матрица A называется ***невырожденной,*** если её определитель

$$\det A \neq 0.$$

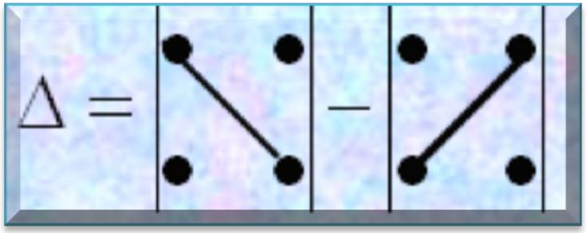
- В противном случае ($\det A = 0$) матрица A называется ***вырожденной.***

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число det A, называемое ее **определителем,** следующим образом:

1. n = 1. A = (a_1); det A = a_1

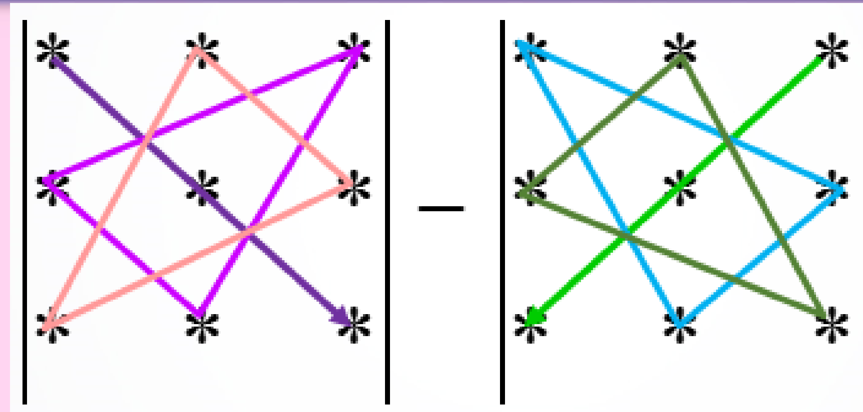
2. n = 2. $$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

- **Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:**



Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot 4 - (-3) \cdot 5 = 7.$$

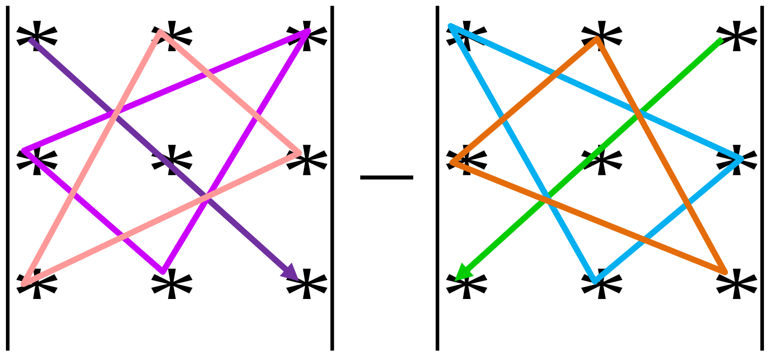


3. n = 3.

Для вычислении определителя 3-го порядка используют ***правило треугольников*** (Саррюса).

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}a_{13} \\ a_{21}a_{22}a_{23} \\ a_{31}a_{32}a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$



Пример. Вычислить определитель третьего порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

$\Delta = 5 \bullet 1 \bullet (-3) +$

$+(-2) \bullet (-4) \bullet 6 +$

$+ 3 \bullet 0 \bullet 1 -$

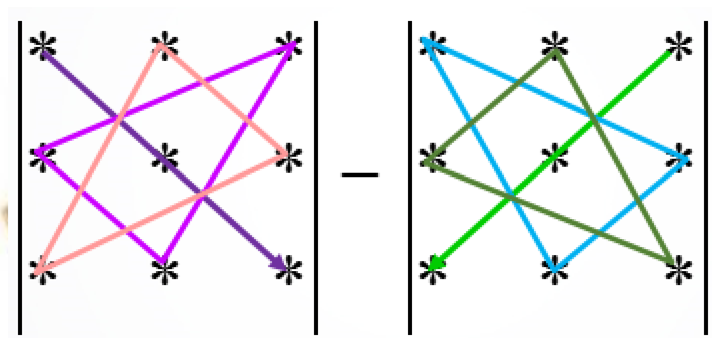
$- 6 \bullet 1 \bullet 1 -$

$- 3 \bullet (-2) \bullet (-3) -$

$- 0 \bullet (-4) \bullet 5 =$

$-15 + 48 - 6 - 18 =$

$= 48 - 39 = 9.$



Пример. Вычислить определитель с помощью правила диагоналей

$$\Delta=\left|\begin{array}{ccc} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{array}\right|\begin{array}{cc} 5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 6 & 0 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$\Delta=5\cdot1\cdot(-3)\ +$

$+(-2)\cdot(-4)\cdot6\ +$

$+\ 3\cdot0\cdot1-$

$-(6\cdot1\cdot1+$

$+\ 0\cdot(-4)\cdot5+$

$+3\cdot(-2)\cdot(-3))\ =$

$-15+48-(6+18)=$

$=33-24=9.$

Определитель произвольной треугольной матрицы равен произведению элементов главной диагонали

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 9 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 \cdot 1 = 14$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Минор элемента $a_{i\,j}$

- **Минором** некоторого элемента a_{ij} квадратной матрицы *А* *n*-го порядка называется определитель *n* –1-го порядка матрицы, полученной из исходной путем вычеркивания из А строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент a_{ij} , минор обозначается M_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{M}23 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

a_{23}=4 $\qquad$ M_{31}=5 $\qquad$ M_{14}=11

Алгебраическое дополнение A_{ik}

- **Алгебраическим дополнением элемента** a_{ik}

квадратной матрицы A называется число A_{ik} :

- $$\boxed{A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik} \,.}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 7 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad M23 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 5 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 60 + 20 + 0 - 250 - 0 - 42 = 13$$

$a_{23}=4$ $\qquad$ $M_{31}=5$ $\qquad$ $M_{14}=11$

Для предыдущего примера:

$A_{23} = -M_{23} = -13$ $\qquad$ $A_{31} = M_{31} = 5$ $\qquad$ $A_{14} = -M_{14} = -11$

ФОРМУЛА ЛАПЛАСА

Теорема. Определитель матрицы равен сумме произведений элементов любого ее ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Разложение определителя по элементам первой строки:

$$\boxed{\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.}$$

Пьер-Симо́н, маркиз де Лапла́с (1749 - 1827) — французский математик, механик, физик и астроном

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 11 & 17 & -12 \end{vmatrix} = 2\times\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 17 & -12 \end{vmatrix} +$$

$$+11\times\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 2(-48+51) - 2(12-17) + 11(3-4) =$$

$$= 6 + 10 - 11 = 5.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & -5 \end{vmatrix} = -2\left(5\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}\right) =$$

$$= -2(5\times 10 - 5\times(-14)) = -2(50+70) = -2\times 120 = -240$$

ПРАВИЛО ЧУЖИХ ДОПОЛНЕНИЙ

- Сумма произведений элементов любого ряда кв. матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого ее параллельного ряда равна нулю.

СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1. Транспонирование матрицы не меняет значения ее определителя.

$$\det A^T = \det A$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

Свойства определителей

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

3. Если соответствующие элементы двух параллельных рядов равны или пропорциональны, то определитель равен 0.

4. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

5. Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на одно и то же число.

6. Определитель матрицы, содержащей целый ряд из нулей, равен нулю.

7. $det\, E = 1$

8. $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

9. Если элементы какой-либо ряда квадратной матрицы А состоят из двух слагаемых, то определитель А равен сумме определителей двух матриц, различающихся между собой только элементами этого ряда, бывшими ранее отдельными слагаемыми.

$$\begin{vmatrix} a'_{11}+a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21}+a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31}+a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a'_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a'_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a''_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a''_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a''_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

«А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит».

М. В. Ломоносов

Спасибо за внимание!